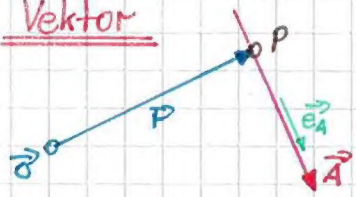


## Vektor



$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}) ; \quad P: \text{Aufpunkt}$$

$\vec{r}$ : Ortsvektor;  $\vec{e}$ : Einheitsvektor

$\vec{O}$ : Ursprung;

$$\vec{e}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} ; |\vec{e}| = 1 ; \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Addition, Subtraktion:

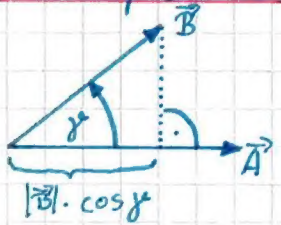
$$\vec{A} \pm \vec{B} = \begin{pmatrix} A_x \pm B_x \\ A_y \pm B_y \\ A_z \pm B_z \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \gamma \quad \text{oder}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z$$

speziell:  $\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|^2$

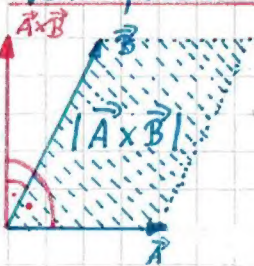


Vektorprodukt:

- a)  $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin \gamma$
  - b) "Rechtsschraubensystem"
  - c)  $\vec{A} \times \vec{B}$  senkrecht auf  $\vec{A}$  und  $\vec{B}$
- oder

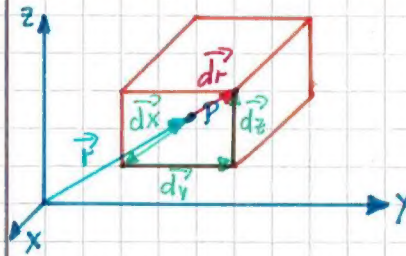
$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} A_y \cdot B_z - B_y \cdot A_z \\ -(A_x \cdot B_z - A_z \cdot B_x) \\ A_x \cdot B_y - B_x \cdot A_y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_y \cdot B_z - B_y \cdot A_z \\ A_z \cdot B_x - A_x \cdot B_z \\ A_x \cdot B_y - B_x \cdot A_y \end{pmatrix}$$



## Koordinatensysteme

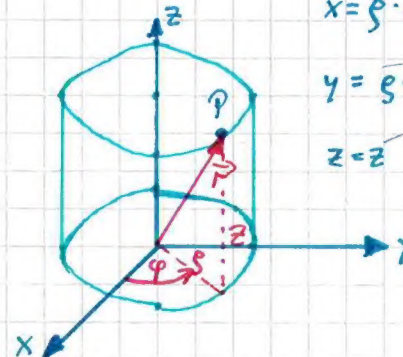
Kartesisches Koordinatensystem



$$d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = dx \cdot \vec{e}_x + dy \cdot \vec{e}_y + dz \cdot \vec{e}_z$$

$$|d\vec{r}| = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Zylinderkoordinaten



Ableiten

$$x = \rho \cdot \cos \varphi \quad \text{Ableiten} \quad y = \rho \cdot \sin \varphi \quad \text{Ableiten} \quad z = z \quad \text{Ableiten}$$

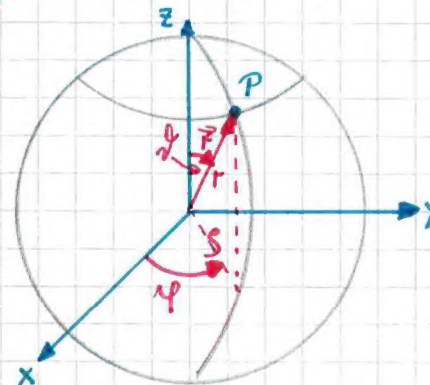
$$d\vec{r} = d\rho \cdot \vec{e}_\rho + \rho \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + dz \cdot \vec{e}_z$$

$$h_\rho = 1,$$

$$h_\varphi = \rho$$

$$h_z = 1$$

Kugelkoordinaten



$$d\vec{r} = dr \cdot \vec{e}_r + r \cdot d\vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta + r \cdot \sin \vartheta \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$h_r = 1$$

$$h_\vartheta = r$$

$$h_\varphi = r \cdot \sin \vartheta$$

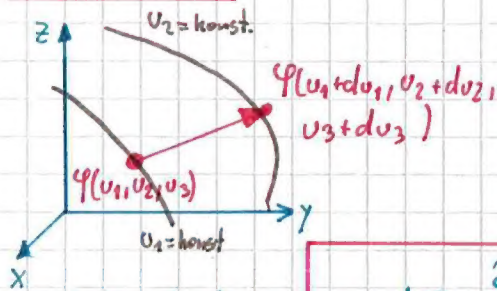
$$x = \rho \cdot \cos \varphi = r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi ; \quad \rho = r \cdot \sin \vartheta$$

$$y = \rho \cdot \sin \varphi = r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi ; \quad z = r \cdot \cos \vartheta$$



## Gradient

= Vektorfeld zeigt in Richtung höheren Potentials



$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \cdot du_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \cdot du_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} \cdot du_3$$

$$d\varphi = \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{r}$$

kart. Koordinaten:

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z$$

Zylinderkoordinaten:

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z$$

$\varphi$ : Potential;  $\varphi$ : Winkel

Kugelkoordinaten:

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

## Wegintegral in einem Gradientenfeld

Wenn gilt:  $\vec{v} = \text{grad } \varphi$ , dann ist das Wegintegral nur von der Lage der Punkte  $P_1$  und  $P_2$  abhängig (nicht vom Weg)!

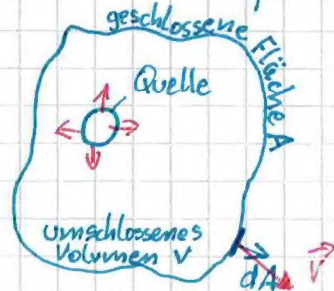
Sonderfall: geschlossener Weg:  $\vec{v} = \text{grad } \varphi$ :  $\oint \vec{v} d\vec{r} = 0$

## Divergenz eines Vektorfeldes

$$q = \int_A \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

"örtliche Ergiebigkeit der Quellen pro Volumen"

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \vec{v} d\vec{A} = \text{div } \vec{v}$$



$$\text{div } \vec{v} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 v_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 h_3 v_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 v_3) \right]$$

Kart.-Koord.:

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y + \frac{\partial}{\partial z} v_z$$

Zylinderk.:

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Kugelk.:

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$$

## Rotation eines Vektorfeldes

nur in wenigen Fällen!

Bei einem Gradientenfeld gilt:  $\vec{v} = \text{grad } \varphi \Rightarrow \oint \vec{v} d\vec{r} = 0$

Liegt kein Gradientenfeld vor, ist:  $\oint \vec{v} d\vec{r} \neq 0 \Rightarrow$  Wirbelfeld

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \oint \vec{v} d\vec{r} = \vec{e}_n \cdot \text{rot } \vec{v}$$

$$\text{rot } \vec{v} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{e}_1 & h_2 \vec{e}_2 & h_3 \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 v_1 & h_2 v_2 & h_3 v_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{rot grad } \varphi = \vec{0}$$

Ein Gradientenfeld ist wirbelfrei.

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \text{grad } \varphi$$

Jedes wirbelfreie Vektorfeld  $\vec{v}(\vec{r})$

kann durch den Gradienten einer skalaren Ortsfunktion  $\varphi(\vec{r})$  beschrieben werden

$$\text{div rot } \vec{v} = 0$$

Ein Vektorfeld ist quellenfrei



## zu: Rotation eines Vektorfeldes

$$\operatorname{div} \vec{w} = 0 \Rightarrow \vec{w} = \operatorname{rot} \vec{v}$$

Jedes quellenfreie Vektorfeld kann durch die

Rotation einer vektoriellen Ortsfunktion  $\vec{v}$  beschrieben werden.

kart. Koordinaten:

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} v_z - \frac{\partial}{\partial z} v_y \\ \frac{\partial}{\partial z} v_x - \frac{\partial}{\partial x} v_z \\ \frac{\partial}{\partial x} v_y - \frac{\partial}{\partial y} v_x \end{pmatrix}$$

Zylinderkoordinaten:

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot v_z & -\rho \cdot \frac{\partial}{\partial z} \cdot v_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial z} v_\rho & -\frac{\partial}{\partial \rho} v_z \\ v_\varphi + \rho \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} v_\varphi & -\frac{\partial}{\partial \varphi} v_\rho \end{pmatrix}$$

Kugelkoord.:

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\cot \vartheta}{r} \cdot v_\varphi + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} v_\varphi - \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} v_r \\ \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} v_r & -\frac{1}{r} v_\varphi - \frac{\partial}{\partial r} v_\varphi \\ \frac{1}{r} v_\vartheta + \frac{\partial}{\partial r} v_r & -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} v_r \end{pmatrix}$$

## Gaußscher Satz

Das Volumenintegral der Erzeugnisfunktion eines Vektorfeldes ist gleich dem Flächenintegral der Hüllfläche des umschlossenen Volumens.

$$\int_V \operatorname{div} \vec{v} dV = \oint_A \vec{v} d\vec{A}$$

Integralsatz von Stokes Das Flächenintegral der Wirbel eines Vektorfeldes ist gleich dem Wegintegral über die Randkurve der Fläche.

$$\int_C \operatorname{rot} \vec{v} d\vec{A} = \oint_C \vec{v} d\vec{r}$$

## Laplace - Operator

Def:  $\Delta \varphi \equiv \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$

kart. K.:  $\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$

Zylinderk.:  $\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$


Kugelk.:  $\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}$

$$\Delta \psi = \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1 = \cot \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \quad \text{mit Vorsicht!}$$



# Das zeitlich veränderliche elektromagnetische Feld

## Induktionsgesetz - Linksschraubensystem!




$$U_i = I \cdot R = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} d\vec{A} = \int_C \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) d\vec{A}$$

$$U_i = \oint_C \vec{E} d\vec{r}$$

$$\oint_C \vec{E} d\vec{r} = \int_A \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) d\vec{A}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

## Verschiebungsstrom



$$\text{div } \vec{V} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \vec{J}^* = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \vec{J}^* = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

in Metall:  $\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$ ; im Dielektrikum:  $\vec{J}^* = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

## Das vollständige Induktionsgesetz

$$U_r = \oint_C \vec{E} d\vec{r} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int_A \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) d\vec{A}; \quad U_b = \oint_C \vec{E}_b d\vec{r} = \int_C (\vec{V} \times \vec{B}) d\vec{r}$$

$$\oint_C \vec{E}_{\text{ges}} d\vec{r} = -\int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{A} + \oint_C (\vec{V} \times \vec{B}) d\vec{r} \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{V} \times \vec{B})$$

## Wirbelströme

zylindr. Leiter: (s. Bild TET1)

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} H_\varphi = \sigma E_z \quad \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = j\omega \mu H_\varphi$$

Besselsche DGL:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E}{\partial \rho} + k^2 E = 0 \quad \underline{J} = \sigma \cdot E = \frac{k \cdot I}{2\pi \rho_0} \cdot \frac{J_0(k\rho)}{J_1(k\rho_0)}$$

kompl. Stromdichte  $k^2 = -j\omega \sigma \mu$

$$\underline{Z} = \frac{k \cdot l}{2\pi \rho_0 \cdot \sigma} \frac{J_0(k\rho_0)}{J_1(k\rho_0)} \quad \text{Eindringmaß } \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu}}$$

$$x = \frac{\rho_0}{2} \cdot \sqrt{\frac{\omega \sigma \mu}{2}} = \frac{\rho_0}{2\delta} \quad ; \quad R_0 = \frac{l}{\sigma \cdot \pi \cdot \rho_0^2}$$

1. Fall:  $x \ll 1$  ("niedrige Frequenz")  $\frac{R}{R_0} = 1 + \frac{1}{3} x^4$

$$\frac{\omega Li}{R_0} = x^2 \left( 1 - \frac{x^4}{6} \right)$$

## 2. Fall: $x \gg 1$ ("hohe Frequenzen"):

$$\frac{R}{R_0} = x + \frac{1}{4} + \frac{3}{64x}$$

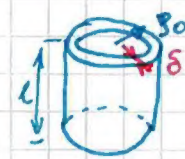
$$\frac{\omega Li}{R_0} = x - \frac{3}{64x} + \frac{3}{128x^2}$$

## 3. Fall für "sehr hohe" Frequenzen: $R \approx \omega Li$

Näherungsformel f. Stromverteilung:  $|J| = \frac{I}{\sqrt{2} \pi \rho \sqrt{\rho_0}} \sqrt{\frac{1}{\rho}} e^{-\frac{\rho}{\delta}}$  ( $x \gg 1$ )

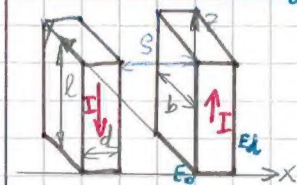
Für "große  $\omega$ " gilt:

$$R = \frac{l}{x \cdot 2\pi \cdot \rho_0 \cdot \delta}$$



$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu}} \quad ; \quad R \approx \omega Li$$

## Parallelkabelleitung:



$$E_z = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_\varphi}{\partial x}$$

$$H_\varphi = \frac{1}{j\omega \mu} \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

zw. Platten:  $H_z = \frac{I}{b}$   
in Platten:  $H_z = \frac{I}{b \cdot \delta} \cdot x$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{2j}{\delta^2} E = 0$$

Abschirmwirkung:

$$\frac{E_d}{E_0} = \frac{1}{\cosh((1+j)\frac{d}{\delta})} = \frac{J_A}{J}$$

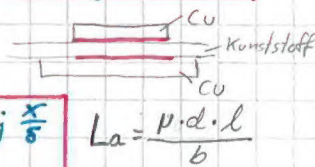
$$\underline{Z} = \frac{d}{\delta} R_0 (1+j) \coth((1+j)\frac{d}{\delta}) = R + j\omega Li \quad \leftarrow R_0 = \frac{l}{x \cdot b \cdot d}$$

Sonderfall:  $\frac{d}{\delta} \gg 1$ : "hohe" f., "dicke" Platten:  $\underline{Z} = (1+j) R_0 \frac{d}{\delta}$



für ein Band:

$$R = \omega Li = \frac{l}{x \cdot b \cdot \delta}$$



Stromverteilung:

$$\underline{J} = \sigma \cdot E = J_0 \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \cdot e^{-j\frac{x}{\delta}}$$

$$L_a = \frac{\mu \cdot d \cdot l}{b}$$

$H(x) = \frac{I}{b} \cdot e^{-(1+j)\frac{x}{\delta}} \quad \underline{J} = \underline{J}_0 \cdot e^{-(1+j)\frac{x}{\delta}}$  Abklingen Phasendrehung

## Hohlleiter:

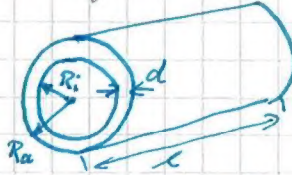
$\delta \gg d$  ( $\frac{\delta}{d} \gg 1$ ):  $R \approx R_0 = \frac{l}{\sigma A} = \frac{l}{\sigma \pi (R_a^2 - R_i^2)}$

$\delta \ll d$  ( $\frac{\delta}{d} \ll 1$ ):

$$R = \frac{l}{x \cdot 2\pi R_a \cdot \delta}$$

Koax:

$$R = R_i + R_a = \frac{l}{x \cdot 2\pi \rho} \left( \frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_a} \right)$$





# Magnetisches Feld

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

Felderzeugung durch zeitlich konst. Ströme.

$$dI = J dA$$

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \quad I = \int_A \vec{J} d\vec{A} \quad [J] = \frac{A}{m^2} \quad ; \quad J = \frac{I}{A} \quad ; \quad \rho = \frac{1}{\sigma}$$

J: Stromdichte ;  $\sigma$ : spezifische Leitfähigkeit  $R = \frac{\rho \cdot l}{A}$

Gesetz v. Oersted, Durchflutungsgesetz

$$\oint_C \vec{H} d\vec{r} = I = \int_A \vec{J} d\vec{A} \quad \text{Das Kurvenintegral der magn. Feldstärke } H \text{ längs der eingeschlossenen Kurve } C \text{ ist gleich dem omschlossenen Strom } I.$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} \quad \text{Das magn. Feld weist an Stellen nicht verschwinden der Stromdichte auf.} \quad \text{wirbel}$$

Flußdichte: B  $[H] = \frac{A}{m}$   $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad [B] = \frac{\text{Vs}}{m^2} = T \quad \mu_r: \text{Permeabilitätszahl}$$

Magn. Fluß:  $\Phi$   $\Phi = \int_A \vec{B} d\vec{A} \quad [\Phi] = \text{Vs}$

$$\Phi = \oint_C \vec{V} d\vec{r} = L \cdot I$$

Vektorpotential  $\vec{V}$ :

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{Es gibt keine magn. Einzelladungen. B-Feld ist quellenfrei!}$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{V} \quad \text{div } \vec{V} = 0 \quad \Phi = \int_C \vec{V} d\vec{r}$$

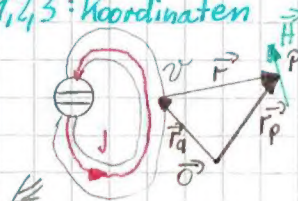
Falls  $\mu_r = \text{konst.}$ :  $\Delta V_i = -\mu \cdot J_i \quad i=1,2,3: \text{Koordinaten}$

$$\vec{V} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}}{r} d\vec{V} \quad r = |\vec{r}_P - \vec{r}_Q|$$

Feldstärke  $\vec{H}$ :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{1}{4\pi} \int_V \left( \vec{J} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) d\vec{V}$$

Biot-Savart



$$r = |\vec{r}_P - \vec{r}_Q|$$

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{d\vec{r}_Q \times \vec{r}}{r^3} \quad \text{Biot-Savart Differentialform für "dünnen" Draht}$$

Bei "dünnem" Draht gilt:  $\vec{H}(\vec{r}_P) = \frac{I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{r}_Q \times \vec{r}}{r^3}$

Spezialformen:  $\vec{e}_H = \frac{\vec{e}_r \times \vec{r}}{|\vec{e}_r \times \vec{r}|}$  siehe 98/99 ②

endlich langes, gerades Leiterstück!  $H = \frac{I}{4\pi \rho} (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)$

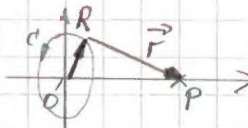
unendlich langer, gerader Leiter:  $H = \frac{I}{2\pi \rho}$

eine Kreisspule:  $\vec{H} = \frac{I \cdot R^2}{2} \cdot \frac{1}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \cdot \vec{e}_x$

wenn  $x \gg R$  (Fernfeld):  $\vec{H} = \frac{I \cdot R^2}{2} \cdot \frac{1}{x^3} \cdot \vec{e}_x$

$x=0$  (Kreismittelpunkt):  $\vec{H} = \frac{I}{2R} \cdot \vec{e}_x$

Zylinderspule:  $\vec{H} = \frac{I \cdot N}{2l} \left( \frac{x + \frac{l}{2}}{\sqrt{R^2 + (x + \frac{l}{2})^2}} - \frac{x - \frac{l}{2}}{\sqrt{R^2 + (x - \frac{l}{2})^2}} \right) \cdot \vec{e}_x$



Induktivität L:  $\Phi = L \cdot I \quad ; \quad \sum_{j=1}^n \Phi_j = \Psi_m = L \cdot I$

$$L = \frac{\Phi_m}{I} \quad \Phi_m: \text{verknütteter Fluß} \quad [L] = \frac{\text{Vs}}{A}$$

Doppelleitung:  $L = \frac{\mu_0 \cdot l}{4\pi} (1 + 4 \cdot \ln \frac{d-a}{a})$   $\frac{a}{2} d \frac{a}{2} l$ : Länge

äußere Ind.:  $L_a = \frac{\mu_0 \cdot l}{\pi} \cdot \ln \frac{d-a}{a}$ ; innere:  $L_i = \frac{\mu_0 \cdot l}{8\pi}$

Kräfte im magn. Feld:

Kraft zw. 2 Stromdurchf. Leitern:

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 \cdot l}{2\pi} I_1 I_2 \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^2}$$

Kraft auf "dünnem" Leiter:

$$\vec{F} = I \int_C (d\vec{r} \times \vec{B}) \quad \{ F = I \cdot l \cdot B \}$$

Energiedichte:

$$w_m = \frac{1}{2} B \cdot H = \frac{1}{2} \mu H^2 \quad W = \frac{1}{2} I^2 L$$

Energie:

Kraftdichte:

$$W = \int_V w_m dV$$

$$\frac{dF}{dA} = \frac{1}{2} \cdot B \cdot H$$



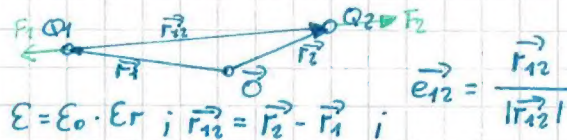


# Elektrostatisches Feld

$$\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$$

## Gesetz von Coulomb

$$\vec{F}_2 = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{|\vec{r}_{12}|^2} \cdot \vec{e}_{12}$$



$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

$$F_2 = Q \cdot \vec{E}$$

mehrere Ladungen:  
Superposition:

$$\vec{E}_{ges} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

für Punktladung:  $\vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{|\vec{r}_{12}|^2} \cdot \vec{e}_{12}$

Raumladungsdichte:

$$\rho = \frac{dQ}{dV}$$

$$Q_{ges} = \int_V \rho \cdot dV$$

Flächenladungsdichte:

$$\sigma = \frac{dQ}{dA}$$

$$Q_{ges} = \int_A \sigma dA$$

Linienladungsdichte:

$$\lambda = \frac{dQ}{ds}$$

$$Q_{ges} = \int_c \lambda ds$$

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} i dt$$

## Feldgleichungen der Elektrostatik

Potential einer Punktladung:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi$$

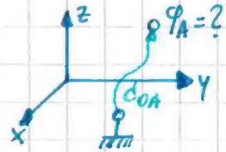
Das elektrostatische Feld ist ein Gradientenfeld, es ist wirbelfrei.

$$E = -\text{grad } \varphi \Rightarrow \oint_C \vec{E} d\vec{r} = 0 \Rightarrow \text{rot } \vec{E} = \vec{0}$$



$$U_{12} = \int_C \vec{E} d\vec{r} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{W_{12}}{Q} \text{ Spannung}$$

$$\varphi_A = -\int_{COA} \vec{E} d\vec{r}$$



Potential

Elektrische Flußdichte:

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$$

Elektrischer Fluß: d.h. Fluß = eingeschlossene Ladung

$$\psi_e = \int_A \vec{D} d\vec{A}$$

$$\psi_e = Q$$

Maxwell Integralform:

$$\oint_A \vec{D} d\vec{A} = \int_V \rho dV$$

Hüllintegral d.h. Flußdicht = Gesamtladung im umschlossenen Volumen

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

Maxwell (Differentialform)

$$D = \frac{dQ}{dA} = \sigma$$

← auf einer Metalloberfläche

$$Q = \int_A \vec{D} d\vec{A}$$

Poissonsche Gleichung:

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Laplace Gleichung:

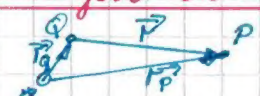
$$\Delta \varphi = 0$$

falls  $\rho = 0$

## Potentialberechnung bei gegebener Ladungsverteilung

Potential einer Punktladung:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q}{r}$$



Potential mehrerer Punktladungen:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i}$$

Potential einer kontinuierlich verteilten Raumladung  $\epsilon = \text{konst.}$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \int_V \frac{\rho}{r} dV$$

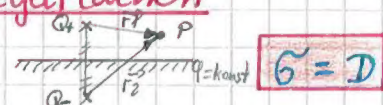
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \int_A \frac{\sigma}{r} dA$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \int_c \frac{\lambda}{r} ds$$

$$r = |\vec{r}_P - \vec{r}_A|$$

## Berechnung des Feldes durch Spiegelflächen

$$\varphi(r_P) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$



$$\vec{G} = \vec{D}$$

## Numerisches Lösungsverfahren

$$U_0 = \frac{1}{4} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4)$$

## Teilkapazität

$$C_{12} = \frac{\int_A \vec{D} \cdot d\vec{A}}{\int_C \vec{E} d\vec{r}} = \frac{Q_{12}}{U_{12}}$$

## Energie- und Kraftdichte

$$W = \frac{1}{2} C \cdot U^2$$

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \epsilon \cdot E^2 = \frac{1}{2} E \cdot D$$

$$W = \int_V w dV$$

Kraftdichte:

$$\frac{dF}{dA} = \frac{1}{2} E D$$

Plattenkondensator:  $C' = \frac{\epsilon A}{d}$

Kugelkondensator:  $C' = 4\pi\epsilon \cdot \frac{R_a \cdot R_i}{R_a - R_i}$

Kabel:  $C' = \frac{2\pi\epsilon \cdot l}{\ln \frac{R_a}{R_i}}$

Plattenkondensator  $E = \frac{U}{d}$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon}$$



## Ebene elektromagnetische Wellen im Raum

Eindimensionale Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

orthogonales Dreiersystem:

$$\vec{e}_x \times \vec{H} = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot \vec{E} \quad |\vec{E}| = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot |\vec{H}|$$

$$\vec{e}_x \times \vec{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \vec{H}$$

Phasengeschwindigkeit:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \epsilon}} \quad i c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}} \quad i c_0 = 299792458 \text{ m/s}$$

Wellenwiderstand d. Raumes:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$Z = \frac{E_y}{H_z}$$

$$E_y \perp H_z$$

$$Z_0 = 376,73 \Omega$$

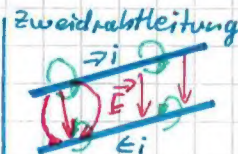
$$\lambda = \frac{c}{f}$$

$$\vec{E} = E_0 \cdot \sin(\omega(t - \frac{x}{c})) \cdot \vec{e}_y \quad |\vec{S}| = \frac{E^2}{Z}$$

Strahlungsdichte:

$$\vec{E} \times \vec{H} = \vec{S} \quad \text{Poyntingscher Vektor}$$

Leistungsdichtenvektor



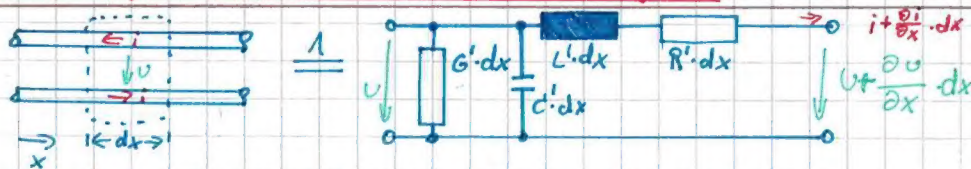
momentane Leistung durch Fläche:

$$p(t) = \int_A \vec{S} \cdot d\vec{A}$$

Sonderfall: Einebene Welle (Sinus)  $|\vec{S}| = E \cdot H$  ;  $H = \frac{E}{Z_0}$

$$|\vec{S}| = \frac{E^2}{Z_0}$$

## Elektromagnetische Wellen auf Leitungen



$R' [\frac{\Omega}{\text{km}}]$  Widerstandsbelag

$L' [\frac{\mu\text{H}}{\text{km}}]$  Induktivitätsbelag

$G' [\frac{\text{S}}{\text{km}}]$  Ableitungsbelag

$C' [\frac{\text{F}}{\text{km}}]$  Kapazitätsbelag

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = L'C' \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + (R'C' + G'L') \frac{\partial U}{\partial t} + G'R'U$$

Telegraphen Gleichung

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L'C' \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (R'C' + G'L') \frac{\partial i}{\partial t} + G'R'i$$

1. Sonderfall:

$$U = \underline{U} \cdot e^{j\omega t - \gamma x}$$

$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = \alpha + j\beta$$

$\alpha$ : Dämpfungskonst. ;  $\beta$ : Phasenkonst. ;  $\gamma$ : komplexe Fortpflanzungskonstante

Phasengeschwindigkeit:  $v = \frac{\omega}{\beta}$

Wellenlänge:  $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2\pi}{\beta}$

$$\underline{U}_h = \underline{U}_h \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{j\omega(t - \frac{x}{v})}$$

$$\underline{U}_r = \underline{U}_r \cdot e^{\alpha x} \cdot e^{j\omega(t + \frac{x}{v})}$$

Wellenimpedanz einer Leitung:

$$\frac{\underline{U}_h}{\underline{I}_h} = \underline{Z}_0 = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

$$\frac{\underline{U}_r}{\underline{I}_r} = -\underline{Z}_0$$

Allgemein:

$$\underline{U}(x,t) = \underline{U}_h \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{j\omega(t - \frac{\beta}{\omega}x)} + \underline{U}_r \cdot e^{\alpha x} \cdot e^{j\omega(t + \frac{\beta}{\omega}x)}$$

$$\underline{i}(x,t) = \underline{I}_h \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{j\omega(t - \frac{\beta}{\omega}x)} + \underline{I}_r \cdot e^{\alpha x} \cdot e^{j\omega(t + \frac{\beta}{\omega}x)}$$

1. Sonderfall: Verlustfreie Leitung: ( $R'=0, G'=0$ )

$$[\beta] = \frac{1}{\text{m}}$$

$$\gamma = \sqrt{j\omega L' C'} = j\omega \sqrt{L' C'} ; \alpha = 0 ; \beta = \omega \sqrt{L' C'}$$

$$v = \frac{\omega}{\beta}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{L' C'}}$$

Phasengeschw. frequenzunabh.  $\Rightarrow$  keine Signalverz.

$$\underline{Z}_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

Wellenwiderstand ist reell!

2. Sonderfall  $G'=0$ ;  $R' \ll \omega L'$

$\alpha$ : Dämpfung

$$\alpha = \frac{1}{2} R' \sqrt{\frac{C'}{L'}} \left( 1 + \frac{R'^2}{8\omega^2 L'^2} \right)$$

$$\alpha = \frac{R'}{2} \sqrt{\frac{C'}{L'}}$$

Leitung sollte kapazitätsarm sein

$$\beta = \omega \sqrt{L' C'} \left( 1 + \frac{R'^2}{8\omega^2 L'^2} \right)$$

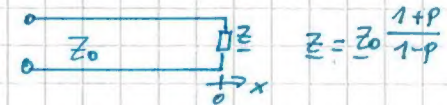
$$v = \frac{1}{\sqrt{L' C'}} \left( 1 - \frac{R'^2}{8\omega^2 L'^2} \right)$$

Phasengeschw. nimmt mit  $R'$  ab.

$$\underline{Z}_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \left( 1 - j \frac{R'}{2\omega L'} \right)$$

höhere f sind schneller  $\rightarrow$  Signalverformung

Abschlußwiderstand am Leitungsende:



Reflexionsfaktor:

$$\rho = \frac{\underline{U}_r}{\underline{U}_h} = \frac{\underline{Z} - \underline{Z}_0}{\underline{Z} + \underline{Z}_0}$$

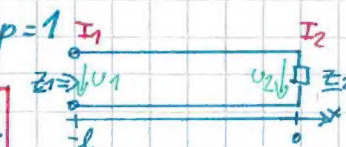
Sonderfälle: ①:  $\underline{Z} = \underline{Z}_0$  (Anpassung):  $\rho = 0$  fortschreitende Welle mit konst. Ampl.

②:  $\underline{Z} = 0$  (Kurzschluß):  $\rho = -1$

Bei offener Leitung:  $\rho = 1$

Eingangsimpedanz einer Leitung:

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \cosh \gamma l + \underline{Z}_0 \sinh \gamma l}{\cosh \gamma l + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_0} \sinh \gamma l}$$



$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2$  bei Anpassung  
- wenn  $l = n \cdot \frac{\lambda}{2}$

Wenn  $l = n \cdot \frac{\lambda}{2} \pm \frac{\lambda}{4}$ :

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_0^2}{\underline{Z}_2}$$



## Weitere Formeln zu TET

### zur Integration

	Zylinder	Kugel	Kreis
$dV \Rightarrow dr$	$2\pi r l dr$	$4\pi r^2 dr$	—
$dA \Rightarrow dr$	$2\pi l dr$ <small>Mantel</small>	$8\pi r dr$	$2\pi r dr$
$dV \Rightarrow dr d\vartheta d\varphi$	—	$r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi$ *	—
$dA \Rightarrow d\vartheta d\varphi$	—	$r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ *	—
$dA \Rightarrow dr d\varphi$	$r dr d\varphi$ <small>Kreisfläche</small>	—	$r dr d\varphi$
$dV \Rightarrow dr d\varphi dz$	$r dr d\varphi dz$	—	—

\*  $\hat{=}$   $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  ;  $0 \leq \vartheta \leq \pi$  | bei Halbkugel: " $\cdot \frac{1}{2}$ "

$$W_R = R \cdot i^2$$

$$W_m = \frac{1}{2} L i^2$$

$$W_e = \frac{1}{2} C i^2$$

91 ⊙



$$H_i = \frac{r}{2\pi \cdot R^2} \cdot I$$

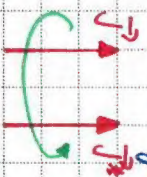


### 4.3 Maxwell'sche Gleichungen

#### Differentialform

#### Durchflutungsgesetz

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

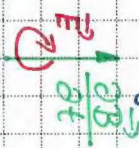


$$\oint_A \vec{H} d\vec{s} = \int_A \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{A}$$

#### Integralform

#### Induktionsgesetz

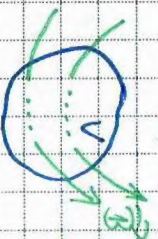
$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$



$$\oint_V \vec{E} d\vec{s} = \int_A \left( - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) d\vec{A}$$

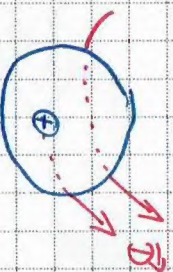
Es gibt keine magn. Eindeipole

$$\text{div } \vec{B} = 0$$



$$\oint_A \vec{B} d\vec{A} = 0$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$



$$\oint \vec{D} d\vec{A} = \int \rho dV = Q$$

Materialgleichungen:

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$$

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

Falls sich Größen sinusförmig mit der Zeit ändern:

$$F(t) = \hat{F} \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \text{Re} \left\{ \hat{F} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} \right\}$$

$$\underline{F} = \frac{\hat{F}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D} = (\sigma + j\omega\epsilon) \vec{E}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad ; \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad ; \quad \text{div } \vec{D} = \rho$$



Sonderfälle:

1.  $\frac{\partial}{\partial t} = 0 \Rightarrow \omega = 0$  ;  $\vec{J} = 0$

$\text{rot } \vec{E} = 0$ ;  $\text{div } \vec{D} = \rho$  Elektrostatik

2.  $\frac{\partial}{\partial t} = 0 \Rightarrow \omega = 0$  ;  $\text{rot } \vec{H} = \vec{J}$

$\text{div } \vec{B} = 0$

Magnetostatik

3.  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \ll \vec{J}$  ; "ω ist klein"

$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  ;  $\text{rot } \vec{H} = \vec{J}$  ;  $\text{div } \vec{B} = 0$

$\text{div } \vec{D} = \rho$

quasistationäre Ströme z.B. Schmelbleit

4. "höhere Frequenzen" ,  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  nicht mehr ver-

nachlässigbar "instationäre" Ströme

z.B. Wellenausbreitung, Strahlung